



TITLE:

# 渦構造の曲率不安定性 (オイラー方程式の数理解析: 渦運動150年)

AUTHOR(S):

服部, 裕司; 福本, 康秀

---

CITATION:

服部, 裕司 ...[et al]. 渦構造の曲率不安定性 (オイラー方程式の数理解析: 渦運動150年). 数理解析研究所講究録 2009, 1642: 197-205

ISSUE DATE:

2009-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140592>

RIGHT:

# 渦構造の曲率不安定性

## Curvature Instability of Vortical Structures

九工大・工 服部裕司, 九大・数理 福本康秀  
Y. Hattori (Kyushu Inst. Tech.), Y. Fukumoto (Kyushu Univ.)

### 1 はじめに

われわれはここ数年渦構造の「曲り」に直接的な起源をもつ不安定性である「曲率不安定性」について研究している。本稿では、渦運動 150 年を機にこれまでの研究についてまとめ、最近の研究について紹介する。

### 2 曲率不安定性

さまざまな流れの中に存在する渦構造の多くは多少なりとも曲がり、振れている。「曲り」をもつ代表的な渦構造の一つとして渦輪が挙げられる。さらに「曲り」に加えて「振り」をもつ代表的な渦構造としては、らせん渦が考えられる。この二つの渦構造の安定性において「曲り」と「振り」がどのように表れるかを明らかにすることは、渦の動力学を理解する上で意義深いと考えられる。

渦輪の安定性については、1970 年代に Widnall らのグループが実験と理論解析の両面から研究を展開した [1, 2]。実験で観察された屈曲波の成長が理論的にも裏付けられた (Widnall 不安定性)。この不安定性は、本質的には直線渦がひずみ流を受けてパラメタ共鳴により 3 次元不安定化する楕円型不安定性 [3, 4] である。すなわち、中立安定な直線渦上には Kelvin 波が立つが、回転方向の波数が 2 異なる Kelvin 波の組が、波数 2 をもつと見ることができひずみ流により共鳴して不安定化するのである。

これに対し、われわれは渦輪の「曲り」に直接的に起因する曲率不安定性が存在することを明らかにした [5, 6]。そのメカニズムは、「曲り」により生じる双極子流 (波数 1) が、波数が 1 異なる Kelvin 波の組を共鳴させて不安定化するというものである。さらに最近われわれは、らせん渦についても渦輪同様に曲率不安定性が存在することを示した [7]。らせんのもつ「振り」と、自己誘導速度などによる回転の効果により、曲率不安定性は変調を受ける。この一連の理論の流れを Fig. 1 に示す。

以下では、らせん渦の短波長安定性解析について述べる。らせん渦の特殊な場合 (振れていない場合) として渦輪も含まれている。線形安定性の範囲内での曲率不安定性の起源とその変調が明らかとなる。

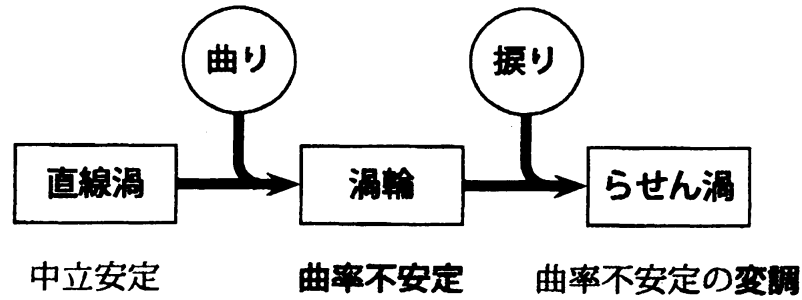


Figure 1: Diagram of curvature instability.

### 3 基本流(らせん渦の流れ場)

らせん渦は次のような一定曲率、一定振率をもつらせん

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_h(s) = \begin{pmatrix} R_0 \cos \frac{s}{\sqrt{R_0^2 + L_0^2}} \\ R_0 \sin \frac{s}{\sqrt{R_0^2 + L_0^2}} \\ \frac{L_0}{\sqrt{R_0^2 + L_0^2}} s \end{pmatrix} \quad (1)$$

を中心とし、有限の太さをもつ渦である。今、渦核断面は円であるとし、その半径を  $\sigma_0$  とする。上のらせんの曲率半径、曲率、振率はそれぞれ  $R_c = \frac{R_0^2 + L_0^2}{R_0}$ ,  $\kappa_1 = R_c^{-1}$ ,  $\kappa_2 = \frac{L_0}{R_0^2 + L_0^2}$  である。

漸近展開により基本流を求め、さらに安定性解析を行う際のキーポイントは渦構造に沿う座標系を導入することである。今の場合、らせんに沿う次のような直交座標系  $(r, \theta, s)$  を導入する

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_h(s) + r \cos \varphi \mathbf{e}_2 + r \sin \varphi \mathbf{e}_3, \quad \theta = \varphi + \kappa_2 s. \quad (2)$$

ただし、 $\{\mathbf{e}_i\}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は Frenet 枠である。角度  $\varphi$  は、 $\varphi = 0$  が主法線ベクトル  $\mathbf{e}_2$  の方向となるように取っているが、 $(r, \varphi, s)$  は直交座標系にならないため、振りを「巻き戻し」て  $\theta$  を定義する [11]。

無次元化を次のように行う

$$r^* = \frac{r}{\sigma_0}, \quad s^* = \frac{s}{R_c}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{u_0}, \quad t^* = \frac{u_0 t}{\sigma_0}. \quad (3)$$

ただし、 $u_0 = \Gamma_0 / (2\pi)$  であり、 $\Gamma_0$  はらせん渦の循環を表す。曲率、振率、回転角速度はそれぞれ次のように無次元化される

$$\kappa_1^* = \sigma_0 \kappa_1 = \epsilon, \quad \kappa_2^* = \sigma_0 \kappa_2 = \epsilon \alpha, \quad \Omega_0^* = \Omega_0 \sigma_0 / u_0 = \beta \epsilon^2. \quad (4)$$

渦核半径と曲率半径の比  $\epsilon = \sigma_0/R_c$  は小さいとする。 $\alpha = \kappa_2/\kappa_1 = L_0/R_0$  を振りパラメタ、 $\beta = \Omega_0/(u_0\sigma_0/R_c^2)$  を回転パラメタと呼ぶことにする。自由空間中に無限に伸びるらせん渦の場合、回転角速度は自己誘導速度によって決まる、つまり  $\beta$  は  $\alpha$  その他のパラメタによって決まるが、今の場合、強制的に回転角速度が決まる場合への応用も考慮して  $\alpha$  と  $\beta$  は独立なパラメタとして取り扱うことにする。以下では無次元の量の \* は省略する。

回転系での Euler 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + 2\Omega \times \mathbf{u} = -\nabla p, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6)$$

をらせんに沿う座標系で表現する。詳細は Hattori and Fukumoto[7] を参照されたい。ここでは  $u$  の時間発展の式を記しておく

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + \epsilon \frac{w}{1 - \epsilon r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial s} + \epsilon \frac{\cos \varphi}{1 - \epsilon r \cos \varphi} w^2 \\ + \epsilon^2 \frac{2\beta}{\sqrt{1 + \alpha^2}} (w \cos \varphi - \alpha v) = -\frac{\partial p}{\partial r}. \end{aligned} \quad (7)$$

渦輪の場合と同様に  $1 - \epsilon r \cos \varphi$  のような因子が表れる。

流れ場を  $\epsilon$  について次のように展開する

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{00} \\ 0 \\ p_{00} \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ w_{01} \\ p_{01} \end{bmatrix} + \epsilon^2 \begin{bmatrix} u_{02} \\ v_{02} \\ w_{02} \\ p_{02} \end{bmatrix} + \dots \quad (8)$$

ただし、 $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta + w\mathbf{e}_s$  であり、0 次では軸流はない ( $w_{00} = 0$ ) とした。この形を Euler 方程式に代入して  $\epsilon$  の各次の式を解くことで基本流を求めることができる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \\ \frac{r^2}{2} \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} \frac{5}{8}(1 - r^2) \sin \varphi \\ \left(\frac{5}{8} - \frac{7}{8}r^2\right) \cos \varphi \\ 0 \\ \left(\frac{5}{8}r - \frac{3}{8}r^3\right) \cos \varphi \end{bmatrix} \\ + \epsilon^2 \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{8}r - \frac{1}{8}r^3\right) \sin 2\varphi \\ \left(\frac{1}{8}r - \frac{1}{16}r^3\right) \cos 2\varphi \\ \left[\left(\frac{5}{8}\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{1 + \alpha^2}}\right)r - \frac{3}{8}\alpha r^3\right] \cos \varphi \\ \left(\frac{1}{2}\frac{\beta\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + \frac{5}{32}\right)r^2 - \frac{9}{128}r^4 + \left(-\frac{15}{64}r^2 + \frac{5}{32}r^4\right) \cos 2\varphi \end{bmatrix} + \dots \quad (9) \end{aligned}$$

$O(\epsilon)$  までの基本流は  $\theta$  の代わりに  $\varphi$  が用いられていることを除けば渦輪の基本流と同じである。無次元化の結果、振りは曲りと同様  $O(\epsilon)$  程度であるので、この違いは  $O(\epsilon^2)$  で初めて効いてくる。このことは、らせん渦が渦輪と同様に曲率不安定であることを意味する。また、 $w$  は  $\alpha = \beta = 0$  のときには消える、言い換えればらせん渦特有のものである。この項と「振り」が曲率不安定性の変調を生むことになる。

## 4 短波長安定性解析

短波長安定性解析を渦輪の場合 [6] と同様に進める。短波長安定性解析では以下の常微分方程式系により安定性が決定される [8, 9]

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{X}), \quad (10)$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\mathcal{L}^T \mathbf{k}, \quad (11)$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \left( \frac{2\mathbf{k}\mathbf{k}^T}{|\mathbf{k}|^2} - I \right) \mathcal{L}\mathbf{a} + 2 \left( \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}^T}{|\mathbf{k}|^2} - I \right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}. \quad (12)$$

ただし、 $\mathcal{L} = \nabla U$  であり、擾乱振幅  $\mathbf{a}$  の式の右辺第 2 項はコリオリ力によるものである。

非圧縮性の条件より  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0$  が要請されるので、擾乱振幅の方程式の自由度は空間の次元 3 から一つ減って 2 となる。よって、2 変数に関する式を導いておく方が都合がよい [10]。今の場合、従属変数を Bayly *et al.* (1996)[10] と同様に

$$p = \frac{k}{k_\perp} \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_\perp, \quad q = \frac{k}{k_\perp} \mathbf{k}_\perp \times \mathbf{a}_\perp, \quad (13)$$

のように選ぶことにする。すると、

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} = & \left[ \frac{d}{dt} \left( \log \frac{k_\perp}{k} \right) - 2\mathcal{L}_s - \frac{l_1 \cdot \mathbf{k}_\perp}{k_s} + \frac{(l_2 \cdot \mathbf{k}_\perp)k_s}{k_\perp^2} \right] p \\ & + \left[ \frac{2k_s^2}{k_\perp^2 k^2} \mathbf{k}_\perp \times \frac{d\mathbf{k}_\perp}{dt} - \frac{(l_2 \times \mathbf{k}_\perp)k_s}{k_\perp^2} + 2\frac{k_s}{k^2} \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} \right] q, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} = & \left[ -\omega_s - \frac{(l_2 \times \mathbf{k}_\perp)k_s}{k_\perp^2} - \frac{l_1 \times \mathbf{k}_\perp}{k_s} - \frac{2}{k_s} \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} \right] p \\ & + \left[ -\frac{d}{dt} \left( \log \frac{k_\perp}{k} \right) + \mathcal{L}_s - \frac{(l_2 \cdot \mathbf{k}_\perp)k_s}{k_\perp^2} \right] q. \end{aligned} \quad (15)$$

が導かれる。ここで、 $\mathcal{L}$  を次のように区分けしている

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_\perp & l_1 \\ l_2^T & \mathcal{L}_s \end{pmatrix}. \quad (16)$$

$l_1$  と  $l_2$  は渦輪の場合 ( $\alpha = \beta = 0$ ) には消える。

3 節で得た基本流を (10), (11) に代入し、 $\epsilon$  について整理して、各次の方程式を解く。詳細は Appendix を参照されたい。

流体運動  $\mathbf{X}$  と波数ベクトル  $\mathbf{k}$  が分かれば、曲率不安定性の成長率は Mathieu の方法 [12] などにより求めることができる

$$\begin{aligned} \mu = & \epsilon \left| -\frac{45r_0}{128} + \frac{75r_0}{256} \cos 2\phi + i \frac{75r_0}{256} \sin 2\phi \right. \\ & \left. + \epsilon \left\{ \sin \phi \sqrt{15} \left( -\frac{5}{64} \gamma + \frac{3}{256} \alpha r_0^2 \right) + i \cos \phi \sqrt{15} \left( \frac{5}{64} \gamma + \frac{9}{128} \alpha r_0^2 \right) \right\} \right|. \end{aligned} \quad (17)$$

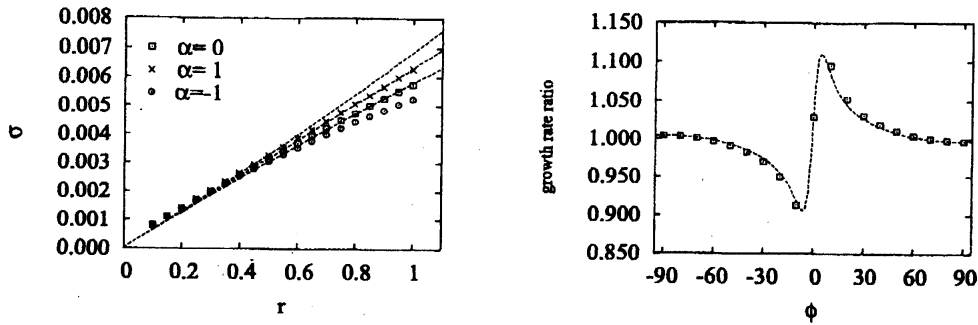


Figure 2: Growth rates obtained by short-wavelength stability analysis. (a) Dependence on  $r_0$ .  $\alpha = 0, \pm 1, \beta = 0, \epsilon = 0.05, \phi = 10^\circ$ . (b) Ratio of growth rates as functions of  $\phi$ .  $\alpha = 1, \beta = 0, \epsilon = 0.05, r_0 = 1$ .

ここで、 $r_0$  は流体粒子運動の半径、 $\pi/2 - \phi$  は  $k$  と軌道のなす角であり、また  $\gamma = \beta/\sqrt{1+\alpha^2}$  である。 $\alpha = \beta = 0$  とおけば渦輪の場合の成長率  $\mu = (15/256)\sqrt{61 - 60 \cos 2\phi}$  が得られる [6]。「振り」と「回転」が  $\phi = 0$  に関する成長率  $\mu$  の対称性を破っていることに注意しよう。また、今は右巻きのらせんを扱ったが、鏡映対称な左巻きのらせんとは  $(\phi, \alpha, \beta) \rightarrow (-\phi, -\alpha, -\beta)$  によって対応付けられており、同じ成長率を持つことも確認できる。

曲率不安定性の成長率を Fig. 2 に示す。Fig. 2(a) は、回転はなし ( $\beta = 0$ ) として  $\alpha = 0$  (渦輪)、 $\alpha = \pm 1$  (らせん渦) の場合の軌道半径 ( $r_0$ ) 依存性を示したものである。成長率は軌道半径にほぼ比例することがわかる。Fig. 2(b) はらせん渦 ( $\alpha = 1$ ) の成長率と渦輪 ( $\alpha = 0$ ) の成長率の比を波数ベクトルの角度  $\phi$  の関数として示したものである。 $\phi = \pm 10^\circ$  付近で比が極大・極小となっていることがわかる。また、どちらの図においても記号が数値解析の結果、線が理論解析 (17) を表している。両者はよく一致している。

## 5 おわりに

渦構造の曲率安定性について、らせん渦の短波長安定性解析を例として紹介した。渦核が曲率半径に比べて小さい (= 細い渦の場合) を考え、漸近展開により表わされた基本流の 1 次の双極子流がパラメタ共鳴により曲率不安定性を生むこと、振れが 2 次で曲率不安定性を変調させることを解説した。

本稿では細い渦輪に焦点を絞ったが、最近太い渦輪についても研究が進んでいる。Hill の球形渦について、短波長安定性解析により、細い渦輪と同様に曲率不安定性が存在すること、また軸流 (swirl) が不安定性に及ぼす効果が明らかとなりつつある。その詳細や直接数値シミュレーションによる研究結果については、別の場で紹介したい。

## A 短波長安定性解析の詳細

### A.1 流体粒子の起動

今の場合  $s$  は  $O(\epsilon^2)$  までは一定であるので、 $r, \theta$  について記す。

#### A.1.1 Leading-order

方程式は

$$\frac{dr^{(0)}}{dt} = 0, \quad r^{(0)} \frac{d\theta^{(0)}}{dt} = r^{(0)},$$

と表わされる。解は次のようになる

$$r^{(0)} = r_0, \quad \theta^{(0)} = t + \theta_0.$$

#### A.1.2 First-order

方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dr^{(1)}}{dt} &= u_{01}(r^{(0)}, \theta^{(0)}), \\ r^{(0)} \frac{d\theta^{(1)}}{dt} + r^{(1)} \frac{d\theta^{(0)}}{dt} &= \frac{\partial v_{00}}{\partial r} r^{(1)} + v_{01}(r^{(0)}, \theta^{(0)}). \end{aligned}$$

と表わされる。解は次のようになる

$$r^{(1)} = -\frac{5}{8}(1 - r_0^2) \cos \varphi^{(0)}, \quad \theta^{(1)} = \left( \frac{5}{8r_0} - \frac{7r_0}{8} \right) \sin \varphi^{(0)}.$$

ただし、 $\varphi^{(0)} = \theta^{(0)} - \alpha s_0$ .

#### A.1.3 Second-order

方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dr^{(2)}}{dt} &= \frac{\partial u_{01}}{\partial r} r^{(1)} + \frac{\partial u_{01}}{\partial \theta} \theta^{(1)} + u_{02}(r^{(0)}, \theta^{(0)}), \\ r^{(0)} \frac{d\theta^{(2)}}{dt} + r^{(1)} \frac{d\theta^{(1)}}{dt} + r^{(2)} \frac{d\theta^{(0)}}{dt} &= \frac{\partial v_{00}}{\partial r} r^{(2)} + \frac{\partial v_{01}}{\partial r} r^{(1)} + \frac{\partial v_{01}}{\partial \theta} \theta^{(2)} + v_{02}(r^{(0)}, \theta^{(0)}). \end{aligned}$$

と表わされる。解は次のようになる

$$\begin{aligned} r^{(2)} &= \left[ -\frac{25}{256r_0} + \left( -\frac{A_{02}}{2} + \frac{5}{128} \right) r_0 + \frac{31}{256} r_0^3 \right] \cos 2\varphi^{(0)}, \\ \theta^{(2)} &= \left( \frac{5}{8} - \frac{21}{32} r_0^2 \right) t + \left( \frac{25}{128r_0^2} + \frac{A_{02}}{2} - \frac{15}{64} + \frac{3r_0^2}{128} \right) \sin 2\varphi^{(0)}. \end{aligned}$$

## A.2 波数ベクトル

### A.2.1 Leading-order

方程式は

$$\frac{dk_r^{(0)}}{dt} - k_\theta^{(0)} \frac{d\theta^{(0)}}{dt} = -k_\theta^{(0)}, \quad \frac{dk_\theta^{(0)}}{dt} + k_r^{(0)} \frac{d\theta^{(0)}}{dt} = k_r^{(0)}, \quad \frac{dk_s^{(0)}}{dt} = 0.$$

と表わされる。解は次のように一定となる

$$\mathbf{k}^{(0)} = \mathbf{k}_0.$$

### A.2.2 First-order

方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dk_r^{(1)}}{dt} - k_\theta^{(0)} \frac{d\theta^{(1)}}{dt} - k_\theta^{(1)} \frac{d\theta^{(0)}}{dt} &= -k_\theta^{(1)} - (\mathcal{L}_1^T \mathbf{k}^{(0)})_r, \\ \frac{dk_\theta^{(1)}}{dt} + k_r^{(0)} \frac{d\theta^{(1)}}{dt} + k_r^{(1)} \frac{d\theta^{(0)}}{dt} &= k_r^{(1)} - (\mathcal{L}_1^T \mathbf{k}^{(0)})_\theta, \\ \frac{dk_s^{(1)}}{dt} &= -(\mathcal{L}_1^T \mathbf{k}^{(0)})_s. \end{aligned}$$

と表わされる。解は次のようになる

$$\begin{aligned} k_r^{(1)} &= -\frac{5}{4} r_0 k_{r0} \cos \varphi + \left( \frac{5}{8r_0} + \frac{7r_0}{8} \right) k_{\theta 0} \sin \varphi \\ k_\theta^{(1)} &= \left( -\frac{5}{8r_0} + \frac{5r_0}{8} \right) k_{r0} \sin \varphi + \frac{1}{4} r_0 k_{\theta 0} \cos \varphi \\ k_s^{(1)} &= r_0 k_{s0} \cos \varphi. \end{aligned}$$

### A.2.3 Second-order

方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dk_r^{(2)}}{dt} - k_\theta^{(0)} \frac{d\theta^{(2)}}{dt} - k_\theta^{(1)} \frac{d\theta^{(1)}}{dt} - k_\theta^{(2)} \frac{d\theta^{(0)}}{dt} &= -k_\theta^{(2)} - (\mathcal{L}_1^T \mathbf{k}^{(1)})_r - (\mathcal{L}_2^T \mathbf{k}^{(0)})_r \\ &\quad - \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}_1^T}{\partial r} r^{(1)} + \frac{\partial \mathcal{L}_1^T}{\partial \theta} \theta^{(1)} \right) \mathbf{k}^{(0)} \right]_r, \\ \frac{dk_\theta^{(2)}}{dt} + k_r^{(0)} \frac{d\theta^{(2)}}{dt} + k_r^{(1)} \frac{d\theta^{(1)}}{dt} + k_r^{(2)} \frac{d\theta^{(0)}}{dt} &= k_r^{(2)} - (\mathcal{L}_1^T \mathbf{k}^{(1)})_\theta - (\mathcal{L}_2^T \mathbf{k}^{(0)})_\theta \\ &\quad - \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}_1^T}{\partial r} r^{(1)} + \frac{\partial \mathcal{L}_1^T}{\partial \theta} \theta^{(1)} \right) \mathbf{k}^{(0)} \right]_\theta, \\ \frac{dk_s^{(2)}}{dt} &= -(\mathcal{L}_1^T \mathbf{k}^{(1)})_s - (\mathcal{L}_2^T \mathbf{k}^{(0)})_s \\ &\quad - \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}_1^T}{\partial r} r^{(1)} + \frac{\partial \mathcal{L}_1^T}{\partial \theta} \theta^{(1)} \right) \mathbf{k}^{(0)} \right]_s. \end{aligned}$$



と表わされる。解は次のようになる

$$\begin{aligned}
 k_r^{(2)} &= k_{r0} \cos 2\varphi \left( \frac{25}{256r_0^2} + \frac{5}{128} + \frac{A_{02}}{2} + \frac{37r_0^2}{256} \right) \\
 &\quad + k_{\theta 0} \left[ \frac{21r_0^2}{16} t + \sin 2\varphi \left( \frac{25}{128r_0^2} - \frac{25}{64} - \frac{27r_0^2}{128} \right) \right] \\
 &\quad + k_{s0} \sin \varphi \left( -\frac{5\alpha}{8} - \frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{9\alpha r_0^2}{8} \right) \\
 k_\theta^{(2)} &= k_{r0} \sin 2\varphi \left( -\frac{25}{128r_0^2} - A_{02} + \frac{25}{64} - \frac{9r_0^2}{128} \right) \\
 &\quad + k_{\theta 0} \cos 2\varphi \left( \frac{25}{256r_0^2} + \frac{5}{128} - \frac{A_{02}}{2} - \frac{35r_0^2}{256} \right) \\
 &\quad + k_{s0} \cos \varphi \left( -\frac{5\alpha}{8} - \frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}} - \frac{3\alpha r_0^2}{8} \right) \\
 k_s^{(2)} &= \frac{5\alpha}{8} (1 - r_0^2) k_{r0} \sin \varphi + \alpha \left( \frac{5}{8} - \frac{7r_0^2}{8} \right) k_{\theta 0} \cos \varphi + \frac{3r_0^2}{8} k_{s0} \cos 2\varphi.
 \end{aligned}$$

## References

- [1] S. E. Widnall, D. B. Bliss and C.-Y. Tsai, "The instability of short waves on a vortex ring," J. Fluid Mech. **66**, 35-47 (1974).
- [2] S. E. Widnall and C.-Y. Tsai, "The instability of the thin vortex ring of constant vorticity," Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **287**, 273-305 (1977).
- [3] D. W. Moore and P. G. Saffman, "The instability of a straight vortex filament in a strain field," Proc. R. Soc. Lond. A **346**, 413-425 (1975).
- [4] C.-Y. Tsai and S. E. Widnall, "The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field," J. Fluid Mech. **73**, 721-733 (1976).
- [5] Y. Fukumoto and Y. Hattori, "Curvature instability of a vortex ring," J. Fluid Mech. **526**, 77-115 (2005).
- [6] Y. Hattori and Y. Fukumoto, "Short-wavelength stability analysis of thin vortex rings," Phys. Fluids **15**, 3151-3163 (2003).
- [7] Y. Hattori and Y. Fukumoto, "Short-wavelength Stability Analysis of a Helical Vortex Tube," Phys. Fluids **21**, 014104 (2009).
- [8] A. Lifschitz and E. Hameiri, "Local stability conditions in fluid dynamics," Phys. Fluids A **3**, 2644-2651 (1991).

- [9] S. Friedlander and M. M. Vishik, "Instability criteria for the flow of an inviscid incompressible fluid," *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2204–2206 (1991).
- [10] B. J. Bayly, D. D. Holm and A. Lifschitz, "Three-dimensional stability of elliptical vortex columns in external strain flows," *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **354**, 895–926 (1996).
- [11] Y.. Fukumoto and T. Miyazaki, "Three-dimensional distortions of a vortex filament with axial velocity," *J. Fluid Mech.* **222**, 369–416 (1991).
- [12] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations* (Dover, New York, 1956) Chap. 15.